

פיזיקה 1 לרפואה

פרק 14 - מעבר על נגזרות אינטגרלים וקואורדינטות לצורך חישובים של מרכז מסה ומומנט התמד באמצעות אינטגרלים

תוכן העניינים

1. נגזרות ואינטגרלים בסיסיים.....1
2. אינטגרל כפול ומשולש.....7
3. קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאלים.....9

נגזרות ואינטגרלים בסיסיים:

רקע

נגזרות:

הנגזרת נותנת את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה כלשהיא.

אם y היא פונקציה של x אז הסימון של הנגזרת של y לפי x הוא $\frac{dy}{dx}$ או y' .

נגזרת של פולינום:

$$y(x) = x^n \rightarrow y'(x) = nx^{n-1}$$

כפל בקבוע אפשר להוציא מהנגזרת:

$$(Ay(x))' = Ay'(x)$$

נגזרת של מכפלה:

$$y(x) = f(x)g(x) \rightarrow y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

כלל שרשרת:

אם y היא פונקציה של x ו- x היא פונקציה של t אז:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

נגזרות של פונקציות נוספות:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} ; \quad \frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x ; \quad \frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} (e^x) = e^x ; \quad \frac{d}{dx} (\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

אינטגרל:

פעולה הפוכה לנגזרת.

אינטגרל של פולינום

$$\int Ax^n dx = A \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

אינטגרל לא מסוים, מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל.

אינטגרל מסוים, מציבים גבולות בתוצאה של האינטגרל.

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

מה עושה האינטגרל?

האינטגרל מבצע סכימה על ערכי הפונקציה.

האינטגרל נותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה.

שאלות:

(1) דוגמה 1

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y = 5x^4, \frac{dy}{dx} = ?$

ב. $y = ax^5, \frac{dy}{dx} = ?$

ג. $y = 5x + 2x^{18}, \frac{dy}{dx} = ?$

ד. $f(x) = 8x^2 + 2, \frac{df}{dx} = ?$

ה. $y = 6t^2, \frac{dy}{dt} = ?$

ו. $x = 5t^3, \frac{dx}{dt} = ?$

ז. $x = 5t^4 + t^3 + 4, \frac{dx}{dt} = ?$

ח. $f(t) = At^6 + Bt + C, \frac{df}{dt} = ?$

(2) דוגמה 2

חשב את הנגזרות הבאות:

א. $y = (5x^4 + 2)(5x + 2x^{18}), \frac{dy}{dx} = ?$

ב. $y = Ax^5(B + Cx^3), \frac{dy}{dx} = ?$

ג. $y = 5x + 2x^2(4x + 5x^5), \frac{dy}{dx} = ?$

ד. $y = (5t^2 + 1)(2t + 27 + 5t^3), \frac{dy}{dt} = ?$

ה. $x = (2t^3 + 7)(4t + 3 + 6t^2), \frac{dx}{dt} = ?$

(3) דוגמה 3-נגזרת פנימית

חשב את הנגזרות הבאות :

א. $y = (x+2)^4$, $\frac{dy}{dx} = ?$

ב. $y = 5(8x^2 + x)^5$, $\frac{dy}{dx} = ?$

ג. $y = 5t + 2(5t^4 + 4)^{14}$, $\frac{dy}{dx} = ?$

ד. $f(t) = 8(5t^4 + t^3 + 4)^2 + 2$, $\frac{df}{dt} = ?$

(4) דוגמה 4-כלל שרשרת

חשב את הנגזרות הבאות :

א. $y = (x+2)^4$, $x = 2t$, $\frac{dy}{dt} = ?$

ב. $y = 5(8x^2 + x)^5$, $x = 5t^4 + 4$, $\frac{dy}{dt} = ?$

ג. $y = 5x + 2(5x^4 + 4)^{14}$, $x = 3t^2 + t$, $\frac{dy}{dt} = ?$

ד. $y = x^2$, $x = t^2$, $\frac{dy}{dt} = ?$

(5) דוגמה 5-נגזרות של פונקציות נוספות

מצאו את הנגזרות של הפונקציות הבאות :

א. $y = \sin(ax)$ כאשר a קבוע.

ב. $y = e^{-x^2}$

(6) דוגמה 1-אינטגרלים בסיסיים

חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\int x^7 dx$

ב. $\int x dx$

ג. $\int dx$

ד. $\int 3 dx$

ה. $\int 7x^4 dx$

ו. $\int (5x^2 + 3) dx$

$$\int (8x^7 + 5x) dx \quad \text{ז.}$$

$$\int Ax^7 dx \quad \text{ח.}$$

$$\int (Ax^7 + Bx) dx \quad \text{ט.}$$

(7) דוגמה 2-אינטגרל מסוים
חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^2 x^5 dx \quad \text{א.}$$

$$\int_1^5 4 dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_{-1}^3 7x^4 dx \quad \text{ג.}$$

$$\int_0^4 (2x^2 + 4) dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_{-1}^2 (Ax^7 + Bx) dx \quad \text{ה.}$$

(8) דוגמה 3-אינטגרל של פונקציות נוספות
חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^\pi \sin x dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^\pi \cos(2x) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int e^{3x} dx \quad \text{ג.}$$

$$\int_0^5 2e^{-3x} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_3^5 \frac{1}{x} dx \quad \text{ה.}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad \text{ו.}$$

$$\int e^{ax} dx \quad \text{ז.}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $20x^3$ ב. $5a \cdot x^4$ ג. $5 + 36x^{17}$ ד. $16x$ ה. $12 \cdot t$
ו. $15t^2$ ז. $20t^3 + 3t^2$ ח. $6At^5 + B$
- (2) א. $20x^3 \cdot (5x + 2x^{18}) + (5x^4 + 2)(5 + 36x^{17})$ ב. $5Ax^4(B + Cx^3) + 3ACx^7$ ג. $5 + 4x \cdot (4x + 5x^5) + 2x^2(4 + 25x^4)$
ד. $(10t)(2t + 27 + 5t^3) + (5t^2 + 1)(2 + 0 + 15t^2)$
ה. $(6t^2 + 0)(4t + 3 + 6t^2) + (2t^3 + 7)(4 + 0 + 12t)$
- (3) א. $4(x + 2)^3 \cdot 1$ ב. $25(8x^2 + x)^4(16x + 1)$ ג. $5 + 560t^3(5t^4 + 4)^{13}$ ד. $16(5t^4 + t^3 + 4)(20t^3 + 3t^2)$
- (4) א. $8(2t + 2)^3$ ב. $500t^3(8(5t^4 + 4)^2 + 5t^4 + 4) \cdot (16(5t^4 + 4) + 1)$ ג. $(5 + 2 \cdot 14(5x^4 + 4)^{13} \cdot (5 \cdot 4x^3 + 0)) \cdot (3 + 2t + 1)$ ד. $4t^3$
- (5) א. $\cos(ax) \cdot a$ ב. $e^{-x^2} \cdot (-2x)$
- (6) א. $\frac{x^8}{8} + C$ ב. $\frac{x^2}{2} + C$ ג. $x + C$ ד. $3x$ ה. $\frac{7x^5}{5} + C$ ו. $x^8 + \frac{5}{2}x^2 + C$ ז. $A \cdot \frac{x^8}{8} + C$ ח. $A \cdot \frac{x^8}{8} + B \cdot \frac{x^2}{2} + C$ ט. $31.875A + 1.5B$
- (7) א. 10.67 ב. 16 ג. 341.6 ד. 58.67 ה. $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$
- (8) א. 2 ב. 0 ג. $\frac{e^{3x}}{3} + C$ ד. $\frac{2}{3}$ ו. $\frac{e^{ax}}{a}$ ז. $-\frac{1}{x} + C$

אינטגרל כפול ומשולש:

שאלות:

פתור את האינטגרלים הבאים:

- (1) אינטגרל משולש – דוגמה 1

$$\int_1^2 \int_0^2 \int_0^3 (zx^2 + 3y) dy dx dz$$
- (2) דוגמה 1

$$\int_0^3 \int_0^2 3 \cdot x^3 y^2 dx dy$$
- (3) דוגמה 2

$$\int_1^2 \int_0^3 (x^2 + 2y) dx dy$$
- (4) דוגמה 3

$$\int_0^2 \int_1^3 (x^2 + y) dy dx$$
- (5) דוגמה 4

$$\int_0^1 \int_0^2 x \cdot z^2 dx dz$$
- (6) דוגמה 5

$$\int_1^5 \int_0^4 2 \cdot y^3 dy dz$$
- (7) דוגמה 6

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 dr d\theta$$
- (8) דוגמה 7

$$\int_a^b \int_0^c 4 \cdot x^2 y dx dy$$
- (9) דוגמה 8

$$\int_a^b \int_0^c (4z + r^2) dr dz$$
- (10) דוגמה 9

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R 4a \cdot r^2 dr d\theta$$
- (11) דוגמה 10

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R 4yr^2 dr d\theta$$
- (12) דוגמה 11

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$$

תשובות סופיות:

(1) 39

(2) 108

(3) 18

(4) 13.33

(5) $\frac{2}{3}$

(6) 512

(7) 56.55

(8) $\frac{4c^3}{3} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right)$

(9) $2cb^2 + \frac{c^3}{3}b - 2ca^2 - \frac{a^3}{3}$

(10) $\frac{4aR^3}{3} 2\pi$

(11) $\frac{8\pi yR^3}{3}$

(12) $4\pi r^2$

קואורדינטות ואלמנטים דיפרנציאליים:

שאלות:

(1) דוגמה-זווית בין וקטורים

נתונים שני וקטורי מיקום:

הוקטור הראשון, $\vec{r}_1$, נתון בקואורדינטות כדוריות כך ש:

$$r = 2m, \theta = 0^\circ, \varphi = 30^\circ$$

הוקטור השני, $\vec{r}_2$, נתון בקואורדינטות גליליות כך ש:

$$r = 1m, \theta = 120^\circ, z = 2m$$

א. חשב את אורכו של כל וקטור.

ב. חשב את הזווית בין הוקטורים.

(2) שטח מעגל

חשב שטח דיסקה בעלת רדיוס R (שטח מעגל) באמצעות אינטגרל על אלמנט שטח בקואורדינטות פולריות.

(3) חישוב נפח גליל

חשב נפח גליל באמצעות אינטגרל על אלמנט נפח בקואורדינטות גליליות.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } |\vec{r}_1| = 2m, |\vec{r}_2| = \sqrt{5}m \quad \text{ב. } \alpha = 48.5^\circ$$

$$(2) \quad S = \pi R^2$$

$$(3) \quad V = \pi R^2 h$$